CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1984

•

CONCOURS SCIENCES

MATHEMATIQUES II

Durée : 4 heures

Vendredi 4 mai 1984 de 8 heures à 12 heures

•

K est un corps commutatif, qui est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ suivant les questions. $\mathcal{M}_n(K)$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients dans K. On note, si $A = (a_{ij})$ et A appartient à $\mathcal{M}_n(K)$, $tr(A)$ le nombre $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ et $det(A)$ le déterminant de A. I_n est la matrice-unité de $\mathcal{M}_n(K)$. Les différentes parties du problème sont largement indépendantes. La partie V utilise les résultats de II.

– I –

A, B et C appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Montrer que $tr(AB) = tr(BA)$, puis que $tr(ABC) = tr(BCA)$.

2) Montrer que si A et B sont semblables, alors $tr(A) = tr(B)$.

3) Montrer que pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$, $tr[(AB)^k] = tr[(BA)^k]$.

– II –

A et M étant données dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on se propose de montrer l'égalité :

$$\mathcal{E}_1 : \forall \lambda;\ \lambda \in \mathbb{C} : det(AM - \lambda I_n) = det(MA - \lambda I_n)$$

par des méthodes différentes, et pour des valeurs différentes de n. Les démonstrations devront être indépendantes.

1) Etablir l'égalité $\mathcal{E}_1$ en prenant $n = 2$.

(A et M sont donc dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ où la matrice unité est I_2).

N.B. PARTIE II - 3.3. - au lieu de : Conclure par $\mathcal{E}_1$

lire : Conclure pour $\mathcal{E}_1$

2) On suppose toujours $n = 2$; E est un $\mathbb{C}$ – espace vectoriel de dimension 2 .

2-1) f et g sont deux endomorphismes de E. et λ est valeur propre de $f \circ g$ associée au vecteur propre x . Montrer que λ est valeur propre de $g \circ f$.

2-2) En déduire l'égalité $\mathcal{E}_1$ pour des matrices associées aux endomorphismes f et g, dans la même base de E .

3) n est quelconque dans $\mathbb{N}^*$.

3-1) Démontrer $\mathcal{E}_1$ si A est régulière (c'est-à-dire inversible).

3-2) A est quelconque dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit x dans $\mathbb{C}$, et $B(x)$ définie par $B(x) = A + xI_n$. Que peut-on dire du cardinal de :

$$\left\{ x \; ; \; x \in \mathbb{C} \; ; \; A + xI_n \text{ est régulière} \right\} \; ?$$

Déduire que pour λ donné dans $\mathbb{C}$, les deux fonctions polynomiales P_λ et Q_λ définies respectivement par :

$$P_\lambda(x) = det[M(A + xI_n) - \lambda I_n] \; ; \; Q_\lambda(x) = det[(A + xI_n)\, M - \lambda I_n]$$

sont égales.

3-3) Conclure par $\mathcal{E}_1$.

– III –

A appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On se propose de démontrer l'inégalité $\mathcal{E}_2$:

$$\mathcal{E}_2 \; : \; det(I + A^2) \geqslant 0 \; .$$

1-1) Soit λ une valeur propre complexe de A . Montrer que λ^2 est valeur propre de A^2 . Réciproquement, soit μ valeur propre de A^2 . Montrer qu'il existe λ, valeur propre complexe de A, telle que $\lambda^2 = \mu$.

1-2) Si z est dans $\mathbb{C}$, factoriser $det(A^2 - zI_2)$ à l'aide de α_1 et α_2, valeurs propres de A . On distinguera $\alpha_1^2 \neq \alpha_2^2$ et $\alpha_1^2 = \alpha_2^2$.

1-3) Déduire l'inégalité $\mathcal{E}_2$.

2) On se propose de montrer $\mathcal{E}_2$ pour n quelconque, par une autre méthode.

2-1) Si M appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\overline{M}$ la matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall (i,j); \; 1 \leqslant i \leqslant n \; ; \; 1 \leqslant j \leqslant n \; : \; p_{ij} = \overline{m_{ij}} \; .$$

Comparer $det(M)$ et $det(\overline{M})$; montrer que $det(M\overline{M}) \in \mathbb{R}^+$.

2-2) Déduire l'inégalité $\mathcal{E}_2$.

N-B – PARTIE V - question 3 - dernière ligne : la notation $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\lambda^2, \mathbb{C})$ signifie "matrice de λ^2 dans la base $\mathcal{B}$"

- IV -

A appartient dans ce paragraphe à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On se propose de montrer l'inégalité $\mathcal{E}_3$.

$$\mathcal{E}_3 \ : \ det(I_n + {}^tAA) > 0 \ .$$

1) $\mathbb{R}^n$ est référé à sa base canonique (e_i) . Montrer que la forme quadratique Q sur $\mathbb{R}^n$, telle que :

$$Q(x) = {}^tXBX \quad (\text{avec} \quad B = I_n + {}^tAA \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{si} \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i \, e_i)$$

est définie positive.

2) Démontrer $\mathcal{E}_3$.

- V -

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3, référé à une base $\mathcal{B}(e_1, e_2, e_3)$, et u est une application de E dans E . u est semi-linéaire si et seulement si :

$$i) \ \forall (x_1, x_2) \in E^2 \ : \ u(x_1 + x_2) = u(x_1) + u(x_2)$$

$$ii) \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \ : \ u(\lambda x) = \bar{\lambda} \, u(x) \ .$$

u est désormais semi-linéaire.

1) Montrer que u^2 est linéaire.

2) Soit λ valeur propre réelle de u^2 , et E_λ sous-espace propre de u^2 , associé à λ . Montrer que E_λ est stable par u .

3) On note $x = \sum_{i=1}^{3} x_i \, e_i$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; de même $y = \sum_{i=1}^{3} y_i \, e_i$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Traduire la relation $y = u(x)$ par une relation matricielle où interviennent X et Y .

En déduire que $\mathcal{M}(u^2, \mathcal{B})$ peut s'écrire $A\bar{A}$, avec A appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

4) Soit $x \neq 0_E$, dans E_λ (défini dans V-2). On suppose λ réel strictement négatif. Montrer que $\{x, u(x)\}$ est libre dans E .

Soit $F = vect(x, u(x))$ et G un supplémentaire de F dans E , engendré par y . (On rappelle que $vect(x, u(x))$ est le sous-espace engendré par x et $u(x)$.)

On pose :

$$u^2(y) = z + \delta y \ ; \quad \text{avec} \quad z \in F \ .$$

Montrer que δ est réel positif ou nul.

Quel est l'ordre de multiplicité d'une valeur propre strictement négative de u^2 ?

5) A appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

5-1) Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ det(A\bar{A} - x \, I_3) \in \mathbb{R} \ .$$

5-2) En déduire que les coefficients du polynôme caractéristique de $A\bar{A}$ sont réels.

6) Etablir l'inégalité $\mathcal{E}_4$: $det(I_3 + A\bar{A}) \geqslant 0$.

(On pourra, en justifiant, utiliser ce qui précède.)